Chapitre 20 - Correction des exercices

Exercice 1: On utilise les sommes de Riemann, les fonctions considérées sont toutes continues sur $[0;1]$.

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \left[x\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$$

$$\frac{b_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$

d'où $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3}$$

$$d_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{3n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+(\frac{k}{n})^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{3+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$e_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$f_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(2)$$

$$g_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{n}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{(k+n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\frac{k}{n}+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$h_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\frac{k}{2n}}{(\frac{k}{2n})^2+\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{x}{x^2+\frac{1}{4}}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\ln(5)}{2}$$

Exercice 2: Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, par le théorème des sommes de Riemann (avec f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^\alpha$ qui est continue),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\frac{1}{n.n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Exercice 3:

1. $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ et donc $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$.

2. $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq \mathrm{Arccos}(x) \leq \pi$. Par croissance encore,

$$0 \leq \int_0^1 x^n \mathrm{Arccos}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \pi\, x^n \mathrm{d}x$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \mathrm{Arccos}(x)\mathrm{d}x = 0$.

<u>Exercice 4</u>: Soit $f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$. Toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes donc $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in [0;1],\ m \leq f(t) \leq M$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 m.t^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t).t^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 M.t^n \mathrm{d}t$$
$$\frac{m}{n+1} \leq \int_0^1 f(t).t^n \mathrm{d}t \leq \frac{M}{n+1}$$

Par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

<u>Exercice 5</u>: *Lemme de Riemann-Lebesgue*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{in}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{in}\mathrm{d}t \\
&= f(b)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nb}}{in} - f(a)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}na}}{in} - \int_a^b f'(t)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{in}\mathrm{d}t \\
\left|\int_a^b f(t)\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}\mathrm{d}t\right| &= \left|f(b)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nb}}{in} - f(a)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}na}}{in} - \int_a^b f'(t)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{in}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|f(b)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nb}}{in}\right| + \left|f(a)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}na}}{in}\right| + \left|\int_a^b f'(t)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{in}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{|f(b)|}{n} + \frac{|f(a)|}{n} + \int_a^b \left|f'(t)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{in}\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{|f(b)|}{n} + \frac{|f(a)|}{n} + \int_a^b \frac{|f'(t)|}{n}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or f est $\mathscr{C}^1$, donc f' est continue sur un segment donc bornée.
Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\mathbf{e}^{\mathbf{int}}\mathrm{d}t = 0$.
On en déduit également $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$.

<u>Exercice 6</u>: En utilisant le changement de variable $\mathscr{C}^1$ $t = -x$, on obtient $I = -\displaystyle\int_3^{-3} \frac{1+t^2}{1+2^{-t}}\mathrm{d}t = \int_{-3}^3 \frac{1+x^2}{1+2^{-x}}\mathrm{d}x$.
D'où $2I = \displaystyle\int_{-3}^3 \frac{1+x^2}{1+2^x}\mathrm{d}x + \int_{-3}^3 \frac{1+x^2}{1+2^{-x}}\mathrm{d}x = \int_{-3}^3 (1+x^2)\left(\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}}\right)\mathrm{d}x = \int_{-3}^3 (1+x^2)\mathrm{d}x = 2(3+9) = 24$.
Conclusion : $I = 12$.

<u>Exercice 7</u>: À l'aide du changement de variable $\mathscr{C}^1$, $y = \mathrm{Arcsin}(x)$ (d'où $\mathrm{d}x = \cos(y)\mathrm{d}y$),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}^{\mathrm{Arcsin}(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)} \mathbf{e}^y \cos(y)\mathrm{d}y = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathbf{e}^{(1+\mathbf{i})y}\mathrm{d}y\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathbf{e}^{(1+\mathbf{i})y}}{1+\mathbf{i}}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(1-\mathbf{i})\left(\mathbf{e}^{(1+\mathbf{i})\frac{\pi}{6}} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

Chapitre 20 - Correction des exercices

<u>Exercice 8</u>: Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Considérons $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, Φ est dérivable sur $[a;b]$.
D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in \,]a;b[$ tel que $\Phi'(c) = \frac{\Phi(b)-\Phi(a)}{b-a}$ i.e. $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

<u>Exercice 9</u>:

$$(f^2-f)^2 = f^4 - 2f^3 + f^2 \Rightarrow \int_0^1 (f^2-f)^2 = \int_0^1 (f^4-2f^3+f^2) = \int_0^1 f^4 - 2\int_0^1 f^3 + \int_0^1 f^2 = 0$$

La fonction $(f^2-f)^2$ est continue sur [0;1], positive et a une intégrale nulle donc $(f^2-f)^2 = 0$ sur $[0;1]$.

$$\forall t \in [0;1],\ f(t)^2 = f(t) \Leftrightarrow f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1$$

Or, la fonction f est continue donc $f = 0$ sur $[0;1]$ ou $f = 1$ sur $[0;1]$.

<u>Exercice 10</u>: Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Supposons que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Considérons $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(t)\mathrm{d}t$ définie sur $[0,\pi]$, cette fonction est dérivable et s'annule en 0 et en π.
   D'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]0,\pi[$ tel que $\phi'(\alpha) = 0$ i.e. $f(\alpha)\sin(\alpha) = 0$ d'où $f(\alpha) = 0$.
2. Supposons que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Par l'absurde supposons que f s'annule une unique fois en α.
   Premier cas, f est de signe constant. La fonction $t \mapsto f(t)\sin(t)$ définie sur $[0,\pi]$ est continue, d'intégrale nulle et de signe constant, par conséquent, c'est la fonction nulle et donc f également. Absurde.
   Second cas, f change de signe. La fonction $t \mapsto f(t)\sin(t-\alpha)$ définie sur $[0,\pi]$ est continue, d'intégrale nulle (il suffit de linéariser le $\sin(t-\alpha)$ et utiliser les hypothèses) et de signe constant (comme f, $t \mapsto \sin(t-\alpha)$ change de signe uniquement en α), par conséquent, c'est la fonction nulle et donc f également. Absurde.
   Par conséquent, f s'annule au moins deux fois.

<u>Exercice 11</u>:
On utilise la formule de Taylor avec reste-intégral à l'ordre 0

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \\ f(x)^2 &= \left(\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \end{aligned}$$

Puis, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer cette intégrale.

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^x 1\times f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 &\leq \left(\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\right).\left(\int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t\right) \\ &\leq x.\left(\int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t\right) \\ f(x)^2 &\leq x.\left(\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

On utilise enfin la croissance et la linéarité de l'intégrale.

$$\int_0^1 f(x)^2\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t\right).\left(\int_0^1 x\mathrm{d}x\right) \text{ d'où } \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t$$

Exercice 12: On s'intéresse à la fonction $f : x \mapsto x\displaystyle\int_0^x \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^t}{1+t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc f est définie sur $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \notin [0,x]\} =]-1;+\infty[$.

2. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ par le théorème fondamental de l'analyse.
   Par produit, f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et
   $$\forall x \in]-1;+\infty[,\ f'(x) = \int_0^x \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t + x.\frac{\mathbf{e}^x}{1+x}$$
   On va étudier le signe de f'.
   Soit $x \in [0;+\infty[$. Par positivité de l'intégrale et de l'exponentielle, $f'(x) \geq 0$.
   Soit $x \in]-1,0[$.
   $$f'(x) = -\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t + x.\frac{\mathbf{e}^x}{1+x}$$
   Donc, $f'(x) \leq 0$.
   Finalement, f est décroissante sur $]-1,0[$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

3. Soit $x \in]-1,0[$. On a donc $f(x) = -x\displaystyle\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$
   $$\begin{aligned} \forall t \in]-1,0[,\ \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} &\geq \frac{1}{\mathbf{e}(1+t)} \\ \int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t &\geq \int_x^0 \frac{1}{\mathbf{e}(1+t)}\mathrm{d}t \\ &\geq -\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} \\ -x\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t &\geq x\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} \end{aligned}$$
   Or, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} x\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} = +\infty$. Par minoration, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 13: On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1;+\infty[$.
   D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$.
   On a, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $H(x) = \phi(x^2) - \phi(x)$. Donc H est $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et pour tout $x \in]1;+\infty[$,
   $$H'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$
   Donc H est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

2. Soit $u : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}$.
   Soit $t \in]1;+\infty[$, posons $h = t-1$ de sorte que $t = 1+h$.
   On a $u(x) = \dfrac{1}{\ln(1+h)} - \dfrac{1}{h} = \dfrac{h - \ln(1+h)}{h\ln(1+h)} \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}h^2}{h^2} \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{2}$.
   Donc u admet une limite finie en 1^+ donc u est prolongeable par continuité sur $[1;+\infty[$.

3. Pour tout $x \in]1;+\infty[$,
$$H(x) = \int_x^{x^2} u(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \int_x^{x^2} u(t)\mathrm{d}t + \ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \int_x^{x^2} u(t)\mathrm{d}t + \ln(x+1).$$

4. Comme u continue alors u est bornée sur $[1;2]$ d'où $\displaystyle\int_x^{x^2} u(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent, $H(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \ln(2)$, H est prolongeable par continuité en posant $H(1) = \ln(2)$.

5. Soit $x \in]1;+\infty[$, posons $h = x-1$ de sorte que $x = 1+h$.
$H'(x) = \frac{h}{\ln(1+h)} \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{h}{h} \underset{x\to 1^+}{\sim} 1$.
D'après le théorème de la limite de la dérivée, H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et $H'(1) = 1$.

<u>Exercice</u> <u>14:</u>

1. La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\cos^{(3)}(t)\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\sin(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2. Les dérivées successives de la fonction cos sont toutes bornées par 1. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{|x|^3}{3!}$$

3. Or $\frac{|x|^3}{3!} \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$, d'où $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

<u>Exercice</u> <u>15:</u> Soit $f : \left\{\begin{array}{ll}]-1\,;+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(1+x)\end{array}\right.$
f est $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$,
$f'(x) = \frac{1}{1+x}$;
$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$;
$f^{(3)}(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}$ et
$f^{(4)}(x) = -6\frac{1}{(1+x)^4}$.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 en 0, on obtient:
$$\forall x \in]-1\,;+\infty[\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t$$
i.e.
$$\forall x \in]-1\,;+\infty[\,,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t\,.$$
Or, en faisant la distinction des cas sur le signe de x, on obtient toujours $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t \geq 0$, d'où
$$\forall x \in]-1\,;+\infty[\,,\ \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\,.$$

Exercice 16:

On a aisément $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Pour calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$, on va effectuer une décomposition en éléments simples. Pour tout $x \in [1,2]$,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

où A, B et C sont des constantes à déterminer. On trouve $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ et $C = \frac{2}{3}$. D'où, pour tout $x \in [1,2]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \sqrt{3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)\end{aligned}$$

On peut maintenant intégrer

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^2 = \frac{1}{18}\left(\sqrt{3}\pi + 3\ln(3) - 6\ln(2)\right)$$